INSTITUT SUPERIEUR DES SCIENCES APPLIQUEES ET DE TECHNOLOGIE DE SOUSSE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Correction des travaux dirigés Régulation Numérique N°3

Exercice n°1

Soit un système numérique dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(z)=\frac{kz}{a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z^1+a_0}$$

Par l'application du critère de Routh, dire qu'elles sont les conditions à satisfaire par les coefficients a_i pour que le système soit stable ?

On commence par considérer $D(z)=a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z^1+a_0$ puis on utilise le changement des variables $w=\frac{z-1}{z+1}\Leftrightarrow z=\frac{1+w}{1-w}$

En remplaçant z par sa nouvelle expression on trouve :

$$\mathrm{D}(\mathrm{w})=\mathrm{a}_4\frac{(\mathrm{w}+1)^4}{(1\text{-}\mathrm{w})^4}+\mathrm{a}_3\frac{(\mathrm{w}+1)^3}{(1\text{-}\mathrm{w})^3}+\mathrm{a}_2\frac{(\mathrm{w}+1)^2}{(1\text{-}\mathrm{w})^2}+\mathrm{a}_1\frac{(\mathrm{w}+1)}{(1\text{-}\mathrm{w})}+\mathrm{a}_0$$

$$D(w)=\frac{1}{(w-1)^4}\left(\begin{array}{l}(\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_4-\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_3+\mathrm{a}_0)\mathrm{w}^4+(-4\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_3+4\mathrm{a}_4+2\mathrm{a}_1)\mathrm{w}^3+(6\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_2+6\mathrm{a}_4)\mathrm{w}^2\\+(-4\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_3+4\mathrm{a}_4)\mathrm{w}+\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_4+\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_3+\mathrm{a}_0\end{array}\right)$$

ainsi on considère le polynôme

$$p(w)=(\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_4-\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_3+\mathrm{a}_0)\mathrm{w}^4+(-4\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_3+4\mathrm{a}_4+2\mathrm{a}_1)\mathrm{w}^3+(6\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_2+6\mathrm{a}_4)\mathrm{w}^2+(-4\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_3+4\mathrm{a}_4)\mathrm{w}+\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_4+\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_3+\mathrm{a}_0$$

$$p(w)=d_4w^4+d_3w^3+d_2w^2+d_1w+d_0$$

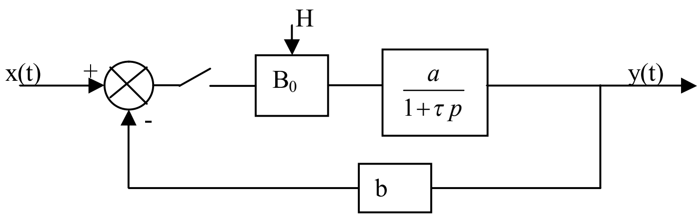
avec

$$\begin{cases} d_4=\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_4-\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_3+\mathrm{a}_0\\ \mathrm{d}_3=-4\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_3+4\mathrm{a}_4+2\mathrm{a}_1\\ \mathrm{d}_2=6\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_2+6\mathrm{a}_4\\ \mathrm{d}_1=-4\mathrm{a}_0-2\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_3+4\mathrm{a}_4\\ \mathrm{d}_0=\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_4+\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_3+\mathrm{a}_0\end{cases}$$

On applique, ensuite, le critère de Routh en utilisant les nouveaux coefficients.

Exercice n°2 :

On considère le système ci-dessous où B_0 représente un échantillonneur bloqueur commandé par un signal d'horloge H



a) Peut-on déterminer a et b pour que la transmittance pulsée de l'ensemble soit celle d'un système présentant un simple retard de valeur T.

La fonction de transfert est :

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\overline{B_0(p)\frac{a}{1+\tau p}}^{*}}{1+b\overline{B_0(p)\frac{a}{1+\tau p}}^{*}}=z^{-1}$$

Or on sait que $\overline{B_0(p)F(p)}^{*}=\frac{z-1}{z}\overline{\frac{F(p)}{p}}^{*}$

Tout calcul fait et en utilisant la table de conversion on trouve : $\overline{B_0\left(p\right)\frac{a}{1+\tau p}}^{*} = a\,\frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}}$

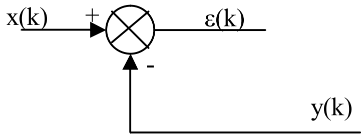
Par la suite la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{a\,\frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}}}{1+ba\,\frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}}}=\frac{a\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}+ba\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}=\frac{1}{z}\Rightarrow za\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)=z-e^{-\frac{T}{\tau}}+ba\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$$

Par identification on trouve :

$$a=\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}\quad et\quad b=e^{-\frac{T}{\tau}}$$

b) Donner l'expression de la sortie entre deux instants d'échantillonnage consécutifs.



En analysant la figure ci-dessus nous pouvons écrire :

$$\varepsilon(k)=x(k)-b\,y(k)$$
$$\varepsilon(k)=x(k)-bx(k-1)$$

Cette écriture est autorisée car le système se comporte comme un retard de valeur unité. Par l'intermédiaire du bloqueur d'ordre zéro cette valeur ε est maintenue constante entre les instants kT et (k+1)T à l'entrée du processus de fonction de transfert $\frac{a}{1+\tau p}$.

On a

$$Y\left(p\right)=\frac{a}{1+\tau p}E(P)\Leftrightarrow\left(1+\tau p\right)=aE(P)\Leftrightarrow\tau pY\left(p\right)+Y\left(p\right)=aE(P)$$

donc on peut écrire:

$$\tau\, y'(t)+y(t)=a\varepsilon(t)$$

C'est une équation différentielle de premier ordre avec second membre différent de zéro et dont la solution générale est :

$$y(t)=\beta e^{-\frac{t}{\tau}}+a\varepsilon$$

La détermination de β se fait en utilisant les conditions initiales :

$$\text{à } t=0\rightarrow y(0)=\beta+a\varepsilon=y(kT)=y_k\Rightarrow\beta=y_k-a\varepsilon$$

Donc :

$$y(t)=\left(y_k-a\varepsilon\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+a\varepsilon$$

$$y(t)=y_k e^{-\frac{t}{\tau}}+a\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

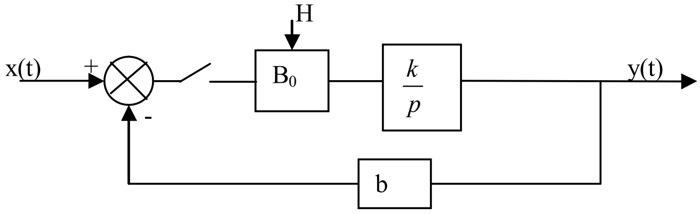
$$y(t)=x(k-1)e^{-\frac{t}{\tau}}+a\left(x(k)-bx(k-1)\right)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Comme cette expression est valable pour kT<t<(k+1)T on peut écrire :

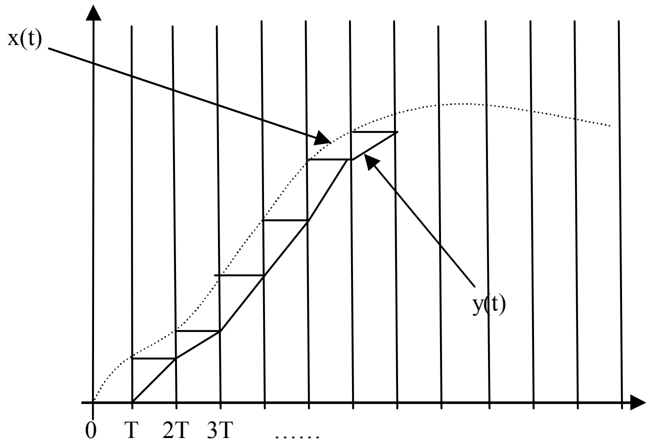
$$y(t)=x(k-1)e^{-\frac{t-kT}{\tau}}+a\left(x(k)-bx(k-1)\right)\left(1-e^{-\frac{t-kT}{\tau}}\right)$$

c) Comparer au dispositif plus classique où le bloqueur est suivi d'un intégrateur de fonction de transfert $\dfrac{k}{p}$

Pour cette partie le montage aura la forme suivante :



Après le bloqueur, le signal est constant, en l'intégrant on obtient une variation linéaire entre deux instants d'échantillonnage.

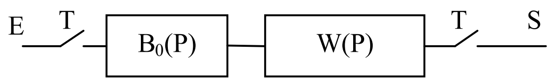


Exercice n°3

Déterminer l'équation de récurrence à programmer sur un calculateur numérique en temps réel pour réaliser l'équivalent exact d'un régulateur PID parallèle non idéalisé précédé d'un échantillonneur - bloqueur d'ordre zéro. La fonction de transfert du régulateur est :

$$w(P) = k\left(1 + \frac{1}{T_i P} + \frac{T_d P}{1 + aT_d P}\right) \qquad a << 1$$

Le schéma bloc du système est le suivant :



La fonction de transfert équivalente du système est

$$H(z) = \frac{k\left(z - e^{-CT}\right)(z-1) + A\left(z - e^{-CT}\right) + B(z-1)^2}{\left(z - e^{-CT}\right)(z-1)}$$

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{z}\overline{\frac{H(p)}{p}}^{*} = \frac{z-1}{z}\overline{\frac{B_0(p)W(p)}{p}}^{*} = k\frac{z-1}{z}\overline{\frac{1}{p} + \frac{1}{T_i p^2} + \frac{T_d}{1 + aT_d p}}^{*}$$

$$H(z) = k\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{T_i(z-1)^2} + \frac{z}{a\left(z - e^{-\frac{T}{aT_d}}\right)}\right]$$

$$H(z) = k + \frac{kT}{T_i(z-1)} + \frac{k}{a}\frac{z-1}{\left(z - e^{-\frac{T}{aT_d}}\right)}$$

On pose

$$A = \frac{kT}{T_i};\ B = \frac{k}{a};\ C = \frac{1}{aT_d}$$

Ainsi

$$H(z) = \frac{k(z-1)\left(z-e^{-CT}\right) + A\left(z-e^{-CT}\right) + B(z-1)^2}{(z-1)\left(z-e^{-CT}\right)}$$

$$H(z) = \frac{k\left(z^2-\left(1+e^{-CT}\right)z+e^{-CT}\right) + A\left(z-e^{-CT}\right) + B\left(z^2-2z+1\right)}{(z-1)\left(z-e^{-CT}\right)}$$

$$H(z) = \frac{(k+B)z^2 + \left(-k\left(1+e^{-CT}\right)+A-2B\right)z + \left(ke^{-CT}-Ae^{-CT}+B\right)}{z^2-\left(1+e^{-CT}\right)z+e^{-CT}}$$

$$H(z) = \frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{b_2z^2+b_1z+b_0} = \frac{a_2+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}{b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}$$

$$\begin{cases} a_2 = k+B \\ a_1 = -k\left(1+e^{-CT}\right)+A-2B \\ a_0 = ke^{-CT}-Ae^{-CT}+B \\ b_2 = 1 \\ b_1 = -\left(1+e^{-CT}\right) \\ b_0 = e^{-CT} \end{cases}$$

Ainsi :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_2+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}{b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2}} \Leftrightarrow$$

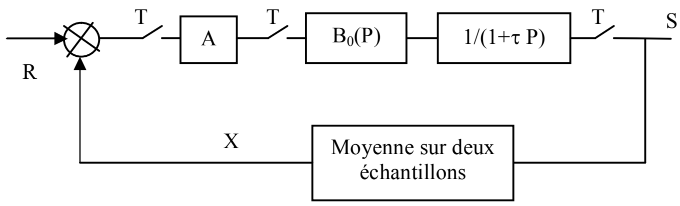
$$\left(b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2}\right)S(z) = \left(a_2+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}\right)E(z) \Rightarrow$$

$$b_2s(nT)+b_1s((n-1)T)+b_0s((n-2)T) = a_2e(nT)+a_1e((n-1)T)+a_0e((n-2)T) \Rightarrow$$

$$s(nT) = \frac{1}{b_2}\left[-b_1s((n-1)T)-b_0s((n-2)T)+a_2e(nT)+a_1e((n-1)T)+a_0e((n-2)T)\right]$$

Exercice n°4

On considère un système échantillonné pour lequel le signal de retour, x, est obtenu en faisant la moyenne arithmétique entre l'échantillon courant et l'échantillon précédent de la sortie. Le schéma fonctionnel est représenté par la figure suivante :



A et τ sont des constantes du système.

1. Ecrire la fonction de transfert entre X(z) et S(z).

On a $x(nT) = \frac{s(nT)+s((n-1)T)}{2} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{2}\left(S(z)+z^{-1}S(z)\right) = \frac{z-1}{2z}S(z) \Rightarrow \frac{X(z)}{S(z)} = \frac{z-1}{2z}$

2. Généraliser au cas où X sera la moyenne arithmétique de n échantillons de la sortie.

Dans ce cas on peut écrire :

$$x(nT) = \frac{s(nT)+s((n-1)T)+s((n-2)T)+\cdots+s(T)}{n} \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left(S(z)+z^{-1}S(z)+z^{-2}S(z)+\cdots+z^{-n}S(z)\right) = \frac{1}{2}\left(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-n}\right)S(z)$$

$$\frac{X(z)}{S(z)} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(z^{-1}\right)^{n+1}}{1-z^{-1}}$$

3. Ecrire la fonction de transfert du système en boucle ouverte.

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$FTBO = A\frac{z-1}{z}\overline{\frac{1}{p(1+\tau p)}}^{*}\frac{z-1}{2z} = A\frac{(z-1)^2}{2z^2}\overline{\frac{\frac{1}{\tau}}{p\left(\frac{1}{\tau}+p\right)}}^{*} = A\frac{(z-1)^{\cancel{2}}}{2z^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{z}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\cancel{(z-1)}\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)} = A\frac{(z-1)}{2z}\frac{\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

4. Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée.

En boucle fermée la fonction de transfert est obtenue en utilisant la formule de Black et en prenant en compte les différents échantillonneurs du système. D'où on obtient :

$$FTBF = \frac{A\frac{z-1}{z}\overline{\frac{1}{p(1+\tau p)}}^{*}}{1+A\frac{z-1}{z}\overline{\frac{1}{p(1+\tau p)}}^{*}\frac{z-1}{2z}} = \frac{A\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\frac{\cancel{z}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\cancel{(z-1)}\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}}{1+A\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\frac{\cancel{z}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\cancel{(z-1)}\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\frac{z-1}{2z}} = \frac{A\frac{\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}}{1+A\frac{\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\frac{z-1}{2z}}$$

$$= \frac{A\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)2z}{2z\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)+A\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)(z-1)}$$