

Stabilité d'un système asservi échantillonné

Condition générale de stabilité

Un système échantillonné est stable si les pôles de sa fonction de transfert pulsée $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle trigonométrique dans le plan z .

Critère de stabilité

Soit un système numérique de fonction de transfert $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. La détermination des pôles z_i nécessite la résolution de l'équation :

$$D(z) = 0 \quad (1)$$

Mais généralement $D(z)$ est un polynôme de degré important. Ainsi la résolution de (1) présente pas mal de difficultés. Pour étudier la stabilité des systèmes échantillonnés sans calculer les pôles z_i on a recours à utiliser l'un des critères suivants

Critère de Shur-Cohn

Soit le polynôme $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. On définit la matrice suivante :

$$D_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k^T \\ B_k & A_k^T \end{bmatrix}$$

Avec $A_k = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ a_{k-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$ et $B_k = \begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ a_{n-k+1} & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$

Pour que le système soit stable il faut que les critères suivants soient vérifiés :

$$\begin{cases} D_k < 0 \text{ pour } k \text{ impair} \\ D_k > 0 \text{ pour } k \text{ pair} \end{cases} \text{ pour } 0 \leq k \leq n$$

Critère de Jury

Soit $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Donc on considère le polynôme $D(z)$ muni de coefficients réels, avec ($a_n > 0$) et on construit avec ces coefficients le tableau suivant comportant $(2n-3)$ lignes :

1	a_0	a_1	\dots	a_{n-k}	\dots	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	\dots	a_k	\dots	a_1	a_0
3	b_0	b_1	\dots	b_{n-k}	\dots	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_{k-1}	\dots	b_0	
5	c_0	c_1	\dots	c_{n-k}	\dots		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	\dots	c_{k-2}	\dots		
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0	\dots		
$2n-3$	q_0	q_1	q_2	\dots			

$$\text{Avec } b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}; c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}; q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

Enoncé : pour que toutes les racine de $D(z)$ soient situées à l'intérieur du cercle unité, il faut et il suffit que les $(n+1)$ relations suivantes soient satisfaites :

$$D(1) > 0$$

$$D(-1) \begin{cases} > 0 \text{ pour } n \text{ pair} \\ < 0 \text{ pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} |a_0| < a_n \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \vdots \\ |q_0| > |q_2| \end{array} \right\} (n-1) \text{ contraintes}$$

Critère de Routh

Une fois élaboré le modèle d'un système, la question de la stabilité se pose si sa structure comprend une boucle (système asservi, système de commande) : on sait que la partie réelle de toutes les racines de l'équation caractéristique doit être négative pour que le système soit stable mais il n'est pas toujours possible de calculer ces racines dès que l'ordre de l'équation est supérieur à deux. Heureusement le critère de Routh élaboré en 1874 donne la réponse sans exiger la résolution de l'équation. Avant l'énoncer, rappelons la condition nécessaire mais non suffisante pour que la partie réelle des racines de l'équation caractéristique

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

soit négative : tous les coefficients a_i doivent exister et avoir le même signe (supposé positif).

Enoncé du critère de Routh :

Le critère de Routh est fondé sur l'examen des termes déduits directement des coefficients de l'équation. Il requiert la construction du tableau dont les première et deuxième lignes sont respectivement constituées des termes $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$ et $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots$. Les termes de la troisième ligne et les lignes suivantes se calculent à l'aide des formules :

$$A_{n-j} = B_{n-j+2} - \frac{A_{n-j+2}}{A_{n-j+1}} B_{n-j+1}$$

$$B_{n-j} = C_{n-j+2} - \frac{A_{n-j+2}}{A_{n-j+1}} C_{n-j+1}$$

⋮

Le critère de Routh s'énonce ainsi : la partie réelle des racines de l'équation est négative (et donc le système représenté par cette équation est stable) si les $n+1$ termes de la première colonne du tableau (appelée série de Routh) ont le même signe ($A_j > 0$ car $a_j > 0$).

Si le signe des termes de la série est différent, le nombre des racines à partie réelle positive est égal au nombre de changements de signe. Le résultat n'est pas modifié si une ligne est multipliée par une constante avant le calcul de la suivante :

$a_n = A_n$	$a_{n-2} = B_n$	$a_{n-4} = C_n$...	a_0 (n pair)
$a_{n-1} = A_{n-1}$	$a_{n-3} = B_{n-1}$	$a_{n-5} = C_{n-1}$...	a_0 (n impair)
$a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = A_{n-2}$	$a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} = B_{n-2}$	C_{n-2}	...	0
A_{n-3}	B_{n-3}	C_{n-3}	...	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	0
A_2	$a_0 = B_2$	0	0	0
A_1	0	0	0	0
$a_0 = A_0$	0	0	0	0

Le système est stable si les différents coefficients A_i ont même signe

Indiquons quelques propriétés importantes :

- Si $A_0 = 0$, les autres A_j ayant le même signe, l'équation caractéristique à une racine $p=0$ (p se met en facteur) et $n-1$ racines à partie réelle négative : le système est marginalement stable.
- Si $A_1 = 0$, les autres A_j ayant le même signe, l'équation possède deux racines imaginaires pures (conjuguées) : $p_{\pm} = \pm j\sqrt{A_0/A_2}$ et $n-2$ racines à partie réelle négative.

Le système est encore marginalement stable.

La vérification de la stabilité d'un système est immédiate lorsque les coefficients a_i sont numériques. Si ces coefficients dépendent explicitement de paramètres, les conditions de stabilité s'écrivent sous forme d'inégalité telles que $A_j(k_1, k_2) > 0$ dans le cas de deux paramètres. Des régions dans l'espace des paramètres, ici le plan (k_1, k_2) , se définissent à l'intérieur desquelles chaque $A_j > 0$ et donc le système stable.

Exemple :

Examinons quelques équations caractéristiques et précisons les conditions de stabilité des systèmes qu'elles représentent :

Ex 1 : $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$

Le système est stable si $a_i > 0 \forall i$ et marginalement stable si $a_1 = 0$: $p = \pm j\sqrt{a_0/a_2}$

Ex 2 : $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$

Il faut commencer par vérifier que $a_i > 0 \forall i$ ensuite on représente le tableau de Routh :

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 & 0 \\ a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2} & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{le système est stable si } \begin{cases} a_i > 0, \forall i \\ a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2} > 0 \end{cases}$$

Ex 3 : $a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$

On commence par vérifier que $a_i > 0 \forall i$ ensuite on représente le tableau de Routh :

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ a_2 - \frac{a_4 a_1}{a_3} & a_0 & 0 \\ a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2 - \frac{a_4 a_1}{a_3}} & 0 & 0 \\ a_2 - \frac{a_4 a_1}{a_3} & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{le système est stable si } \begin{cases} a_i > 0, \forall i \\ a_2 - \frac{a_4 a_1}{a_3} > 0 \\ a_1 - \frac{a_3 a_0}{a_2 - \frac{a_4 a_1}{a_3}} > 0 \end{cases}$$

Ex 4 : équation avec paramètres : $p^3 + p^2 + p + 3(k-1) = 0$

Etant donné les résultats de l'exemple 2, on peut dire que le système est stable si :

$$\begin{cases} k-1 > 0 \\ 1 - \frac{3(k-1)}{1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ -3k+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k < \frac{4}{3} \end{cases}$$

Si $k = \frac{4}{3}$ alors $A_1 = 0$ deux racines de l'équation sont imaginaires : $p_{\pm} = \pm j\sqrt{A_0/A_2} = \pm j$. Ce

point est facile à vérifier, l'équation s'écrit : $(p^2 + 1)(p + 1) = 0$

Application pour le cas d'un système numérique :

Afin de pouvoir appliquer le critère de Routh au cas d'un système numérique il faut commencer par appliquer le changement de variable :

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

Ce changement de variable représente une transformation qui permet d'associer au disque unité de z le demi plan gauche des w . Ainsi l'application de critère de Routh qui permet de trouver le nombre de racines w_i dont la partie réelle est négative permettra de déterminer le nombre de racines z_i dont le module est inférieur à 1 (condition de stabilité d'un système numérique).

Références bibliographiques :

E. DIEULESAINT et D. ROYER, Automatique Appliquée (Tome1 Systèmes linéaires de commande à signaux analogiques), Edition Masson – Paris 1987 ISBN 2-225-81177-6.

E. DIEULESAINT et D. ROYER, Automatique Appliquée (2 Systèmes linéaires de commande à signaux échantillonnés), Edition Masson – Paris 1990 ISBN 2-225-82198-4.